Universidad Simón Bolívar
Departamento de Computación y Tecnología de la Información

Problemario para CI-2523: Estructuras Discretas III

Autores:

Oscar Meza
Gabor Loerincs

Reporte Técnico CI-006-97
Abril 1997

Resumen

Este problemario es un compendio de ejercicios tanto propuestos como recopiladors por los autores an los últimos años. Dichos ejercicios fueron revisados y colocados en orden de acuerdo a los tópicos del curso. Aunque la revisión fue exhaustiva, no está excenta de posibles correcciones, las cuales haremos gustosamente con el valioso aporte que el lector crítico pueda hacer del mismo; por lo que esperamos de estudiantes, preparadores y profesores, que nos hagan llegar sus observaciones y sugerencias.

I - PROBLEMAS DE CONTEO (Coeficientes Elementales de Conteo)

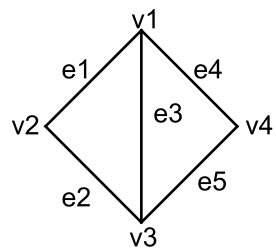
1) Demuestre que si A es un conjunto tal que $|A|=n < \infty$, entonces P(A) y $\{0,1\}^A$ (el conjunto de las funciones de A en {0,1} tienen el mismo número de elementos).

2) ¿Cuál es el número de relaciones que pueden establecerse entre A y B, dos cojuntos finitos?

3) Se dispone de m colores para pintar n casillas ordenadas. ¿De cuantas maneras diferentes se pueden pintar las casillas?

4) ¿Cuántas secuencias de ceros y unos existen tales que contienen m ceros y n unos?

5) Se tiene el siguiente grafo:



Hallar el número de formas de pintar los vértices, si se dispone de n colores, y se quiere que dos vértices adayacentes no tengan el mismo color. (Dos vértices son adyacentes sii existe una arista e_i que los une).

6) ¿Cuál es el número de funciones ("mappings") posibles de A en B (A, B finitos)?

7) Suponiendo que las funciones de A en B (A, B finitos) deban asociar todos los elementos de B a elementos de A, entonces

a) Si $|B| = |A|$ las funciones de A en B deben ser:
_ Inyectivas _ Sobreyectivas _Biyectivas

b) Igual a a) si $|B| < |A|$
c) Igual a a) si $|B| > |A|$

8) ¿De cuántas maneras se puede cambiar un billete de 10 Bs. en billetes o monedas de menor denominación (5, 2, 1, 0.5, 0.25)?

9) ¿Cuántos enteros entre 100 y 999, ambos inclusive, son impares y tienen todas sus cifras diferentes?

10) ¿Cuántos caminos hay desde un vértice de un cubo al vértice opuesto, si cada camino posible debe usar 3 de las 12 aristas del cubo?

11) ¿De cuántas maneras pueden pintarse los lados de un rectángulo con 3 colores, de forma que lados adyacentes tengan colores diferentes?

12) Si X es un conjunto de posiciones numeradas 1,2,...n y A es un conjunto de letras (m letras) a ser colocadas es esas posiciones,

a)¿De cuántas maneras se pueden colocar las m letras de A en los n lugares de X?
b)¿De cuántas maneras se pueden colocar las letras en los n lugares sin repetir letras?

13) ¿De cuántas maneras se pueden colocar m objetos en n cajas, colocando un objeto por caja?

14) ¿Cuántas formas hay de colocar m banderas en n astas?

15) ¿Cuántos subconjuntos de tres letras pueden escogerse de las 28 letras del alfabeto, de manera que ningún grupo de dos letras de las tres del subconjunto sean consecutivas en el alfabeto?

16) ¿De cuántas maneras se pueden sentar n personas en una mesa redonda?

17) Problema anterior con la siguiente restricción: ciertas 2 personas no pueden sentarse juntas

18) Hay k libros sobre una repisa, m rojos y el resto verdes. Indique las formas diferentes en que se pueden ordenar los libros en la repisa en c/u de las siguientes situaciones:
a)Sin restricciones
b)Los libros rojos deben ir juntos y los verdes deben ir juntos
c)Los libros rojos deben ir juntos y los verdes pueden o no ir juntos
d)No pueden colocarse juntos dos libros del mismo color.

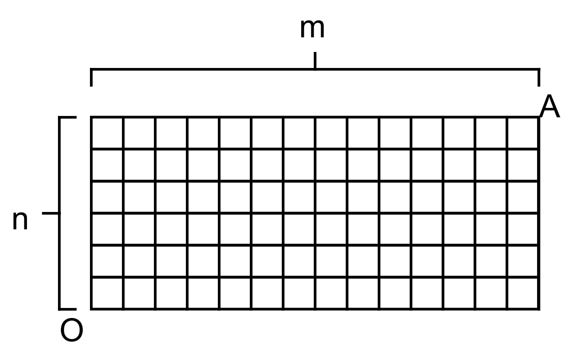
19) ¿Cuál es el número de secuencias decrecientes de tamaño n sobre el alfabeto {1,2,3, ... , n}? ($n \leq m$).

20) De los números entro 0 y 1001, ¿Cuántos contienen el dígito 1 al menos una vez? ¿Cuántos dos veces?

21) De los números entre 1 y 300 (ambos inclusive), ¿De cuántas maneras pueden escogerse tres números distintos entre si y sin importar el orden, tal que la suma de éstos sea múltiplo de 3? Sugerencia: Notar que el conjunto $X = \{1,2,3,...300\}$ se puede particionar en los conjuntos X_i, $0 \leq i \leq 2$, $X_i = \{j \in X \,/\, i \equiv j \bmod 3\}$

22) ¿Cuántas secuencias de longitud n sobre el alfabeto {0,1,2}, contienen al menos un 0, al menos un 1 y al menos un 2?

23) Considere el siguiente mapa de una urbanización:



¿De cuántas maneras distintas puede irse del punto O al punto A, considerando que el desplazamiento siempre es hacia el punto A?

24) ¿De cuántas maneras pueden escogerse n objetos distintos de un grupo de $2n$ objetos, sabiendo que exactamente n de ellos son de un mismo tipo (p.ej. manzanas, peras, ...)?

25)a)¿Cuántas funciones de verdad hay de $\{V,F\}^n$ en $\{V,F\}$
b)Una función autodual es tal que

$$f(a_1,\ldots,a_n) = f(\bar{a}_1,\ldots,\bar{a}_n)$$

¿Cuántas hay?
c)Una función simétrica es tal que
$f(a_1,\ldots a_n)$ = f(cualquier permutación de a_i's)
¿Cuántas hay?

26)¿Cuál es el número de subconjuntos de $A=\{1,2, \ldots n\}$ que contienen exactamente k elementos de los cuales no hay dos que sean enteros consecutivos?

27) Hallar el número de vectores $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ tal que $\alpha_i \in \{0,1\}$ y $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = k$.

28) Del total de 10^n enteros de n dígitos, dos dígitos son considerados equivalentes si uno puede ser obtenido por un permutación de los dígitos del otro.
a)¿Cuántos enteros no equivalentes hay?
b)Si los dígitos 0 y 1 pueden aparecer a lo sumo una vez, ¿Cuántos enteros no equivalentes hay?

29) ¿Cuántas soluciones en enteros positivos tiene la ecuación $x_1 + x_2 + \ldots + x_k = m$, $m \geq k$?

30) Encontrar el número de soluciones enteras de la ecuación $x_1+x_2+x_3=15$ que satisfagan las siguientes restricciones:
$1\leq x_1 \leq 5$
$1\leq x_2 \leq 6$
$1\leq x_3 \leq 8$

31) ¿Sean n,r,m tres enteros ($r\leq m$). Sea R un subconjunto de $\{1,2, \ldots m\}$ con $|R| = r$. Queremos hallar el número de soluciones enteras de la ecuación
$x_1 + x_2 + \ldots + x_m = n$
sujeto a:
$\forall_i \in R$, $x_i \geq 1$
$\forall_i \in \{1,2, \ldots ,m\} - R$ $x_i \geq 0$

32) En el total de 4^n secuencias cuaternarias $\{0,1,2,3\}$ de n dígitos, ¿Cuántas tienen un número par de ceros? ¿Cuántas un número par de ceros y unos?

33) Determinar el número de palabras binarias (formadas por $\{0,1\}$) que contienen p ceros, sin dos ceros consecutivos y n unos.

II - PRINCIPIO DE DESIGUALDAD

1) Mostrar que, en el conjunto $[2n] = \{1,2,3, \ldots ,2n\}$, todo subconjunto de cardinalidad mayor o igual a $n+1$, contiene dos enteros p y q tales que $p = 2^r q$ (con $r > 0$)
Sugerencia: recordar que a todo entero x le corresponde uno y solo un entero impar y tal que $x = 2^r y$, $r \geq 0$.

2) Once ingenieros trabajan en un proyecto secreto. Los documentos están encerrados en un cofre que posee un cierto número de cerraduras. El cofre puede abrirse solamente si 6 ingenieros, al

menos, están presentes. ¿Cuál es número mínimo de cerraduras que deben instalarse? ¿Cuál es el número mínimo de llaves que deben darse a cada ingeniero?
Sugerencia: notar que ningún grupo de 5 ingenieros debe poder abrir el cofre.

III - MANIPULACION DE SUMAS

1) Hacer los siguientes ejercicios del Knuth, Vol. 1: 0, 1, 2, 3, 4, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 20, 22, 25, 29, 31, 37, 38.

2) ¿De cuantas maneras pueden escogerse 1 o más estudiantes de 6 elegibles?

3) Encuentre el número de secuencias binarias de longitud n en las cuales cada 1 es adyacente a otro 1.

4) Hallar el número de palabras de longitud *mxn* que se pueden construir a partir de un alfabeto de tamaño *n*, en la que cada letra aparece *m* veces.

IV - COEFICIENTES BINOMIALES Y MULTINOMIALES

1) Mostrar que $(k!)!$ es divisible por $(k!)^{(k-1)!}$ $k \geq 0$.

2) Usar un argumento combinatorio para probar que
$\frac{(2n)!}{2^n}$ y $\frac{(3n)!}{(2^n 3^n)}$ son enteros.

3) Probar combinatoriamente que

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

4) Mostrar por un argumento combinatorio que

$$\binom{n+1}{p+1} = \binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \ldots + \binom{n-1}{p} + \binom{n}{p}$$

5) Probar combinatoriamente, que si

$\binom{m}{n}$: número de maneras de escoger n objetos de un grupo de m objetos (n<m), entonces:

a) $\binom{m}{n} = \binom{m-1}{n} + \binom{m-1}{n-1}$

b) $\binom{m}{0} = \binom{m}{m} = 1$

c) $\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}$

6) a) Probar la identidad 1x1! + 2x2! + 3x3! + ... + nxn! = (n+1)! - 1

b) Mostrar que cualquier entero $m \geq 0$, puede expresarse univocamente en la siguiente forma (representación factorial):

$m = a_1 1! + a_2 2! + a_3 3! + \ldots + a_i i! + \ldots$ (con $0 \leq a_i \leq i \ \forall i$)

7) Mostrar que:

a) $n\binom{m}{n} = n\binom{m-1}{n-1}$

b) $\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + \ \ldots \ + n\binom{n}{n} = n \times 2^{n-1}$

8) Para cualquier n, mostrar que $\binom{n}{k}$ es máximo cuando:

$k = \frac{n-1}{2}$, $\frac{n+1}{2}$ si n es impar

$k = \frac{n}{2}$ si n es par

9) Mostrar que:

$$\binom{r}{m}\binom{m}{k} = \binom{r}{k}\binom{r-k}{m-k}$$

10) Hallar una forma cerrada para

$$\sum_k \binom{r}{k}\binom{s}{k} k$$

11) Calcular

$$\sum_{0 \leq k \leq m} \binom{n}{k} k$$

12) ¿ Cuál es el valor de

$$\sum_{k \geq 0} \binom{n+k}{2k}\binom{2k}{k}\frac{(-1)^k}{k+1} \quad ?$$

13) Mostrar que

$$\binom{r}{k} = \frac{\mathrm{r}}{\mathrm{r-k}}\binom{r-1}{k} \quad k \neq r$$

14) a) Si extendemos la definición de $\binom{m}{n}$ para $m \in$R, de la forma

$$\binom{m}{n} = \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!},$$

demostrar que

$$\binom{m}{n} = (-1)^n \binom{n-m-1}{n}$$

b) Utilizando a) y la convolución de Vandermonde, demostrar las siguientes igualdades para n,r,s,m,t $\in$ Z$^+$:

b.1) $\sum_k \binom{r}{k}\binom{s}{n+k} = \binom{r+s}{r+n}$

b.2) $\sum_k \binom{r}{k}\binom{s+k}{n}(-1)^k = (-1)^r \binom{s}{n-r}$

b.3) $\sum_{0 \le k \le r} \binom{r-k}{m}\binom{s+k}{n} = \binom{r+s+1}{m+n+1} \quad n \ge s$

b.4) $\sum_{0 \le k \le r} \binom{r-k}{m}\binom{s}{k-t}(-1)^k = (-1)^t \binom{r-t-s}{r-t-m}$

15) Calcular una forma cerrada de $\sum_{i=0}^{k} i^2, \sum_{i=0}^{k} i^3$ y $\sum_{i=0}^{k} i^4$

16) Probar que:

$$(a_1+...+a_m)^n = \sum_{n_1+...+n_m=m} \binom{n}{n_1+...+n_m} a_1^{n_1} a_2^{n_2} ... a_m^{n_m}$$

V - PRINCIPIO DE INCLUSION-EXCLUSION

1) Resolver el ejercicio I-29 aplicando el principio de inclusión-exclusión.

2) Sea *A* un alfabeto de *n* letras diferentes ¿Cuántas palabras de longitud 2*n* pueden formarse tales que contengan dos veces c/u de las letras del alfabeto y tales que dos letras adyacentes sean diferentes?

3) Dos profesores en dos materias distintas examinarán 12 estudiantes en 1 hora, 5 minutos por estudiante. ¿De cuántas maneras se puede realizar la programación de los exámenes en forma que un estudiante no sea examinado simultáneamente por los dos profesores?

4) Determine el número de permutaciones de las 26 letras A, B, ... Z, que no contienen los patrones JUAN, PABLO ni TUCKER

5) Determine el número de órdenes de los enteros entre 1 y *n* en los cuales el entero *i* no se encuentra inmediatamente antes del *i*+1 para *i*=1,...,*n*-1.

6) ¿De cuántas formas se pueden redistribuir los sombreros de n personas de manera que ninguna persona quede con su propio sombrero?

7) Se tiene dos dados idénticos y se quiere calcular la probabilidad de que ciertas combinaciones de los dos dados se produzcan cuando se lanza *n* veces los dados. Combinaciones posibles son, por ejemplo: 1-1, 1-2, 3-6, que significan respectivamente: los dos dados muestras 1, un dado muestran 1 y el otro muestra 2, un dado muestra 3 y el otro muestra 6. Una jugada consistirá en lanzar los dados *n* veces y una realización de una jugada corresponde a la secuencia de las *n* combinaciones de los dados que resultan de los n lanzamientos.

La probabilidad de que a un jugador le salga un conjunto de combinaciones dado(ej.: 1-1, 2-2, 1-2, etc.) en *n* lanzamientos de los 2 dados es igual al número de realizaciones que contienen ese conjunto dividido entre el número total de realizaciones.

a) ¿ Con qué conjunto de configuraciones (conjuntos, palabras, producto cartesiano, palabras monótonas, etc) de las conocidas por usted podemos establecer una función biyectiva entre ese conjunto y las posibles combinaciones de los dados?

b) Responda la pregunta de la parte a) pero con las posibles realizaciones.

c) ¿Cuántas combinaciones posibles de los dos dados hay? Enumérelas. ¿Cuántas realizaciones hay?

d)Determine el número de realizaciones que contienen al menos una de las siguientes combinaciones: 1-1, 2-2, 3-3, 4-4, 5-5, 6-6. Sugerencia: estudie la cardinalidad del complemento de este conjunto)

e)Determine el número de realizaciones que contienen el conjunto de combinaciones {1-1, 2-2, 3-3, 4-4, 5-5, 6-6}.

8) Un salón de clase tiene 2 filas de 8 sillas cada una; se tienen 14 estudiantes de los cuales 5 se sientan en la primera fila y 4 de ellos siempre se sientan en la fila de atras. ¿De cuántas formas se pueden sentar a todos los estudiantes?

9) Una asamblea de 2n+1 representantes está compuesta de miembros pertenecientes a 3 partidos diferentes. ¿De cuántas maneras se pueden repartir los puestos de representantes entre los 3 partidos de forma que una coalición de dos partidos cualesquiera asegura siempre mayoría absoluta?

VI - ECUACIONES DE RECURRENCIA

1) Un extraterrestre puede subir una escalera por pasos de 1 o 2 escalones. Establezca una relación de recurrencia para E_n, el número total de formas en las que el extraterrestre puede subir una escalera de n escalones.

2) Hallar una relación de recurrencia para L_n, el número máximo de regiones definidas por n rectas en el plano.

3) Resolver las siguientes ecuaciones de recurrencia:

a) $A_r - 7A_{r-1} + 10A_{r-2} = 3^r$ $\quad A_0 = 0, A_1 = 1$
b) $A_r - 6A_{r-1} + 9A_{r-2} = 3$ $\quad A_0 = 0, A_1 = 1$

4) Calcular, usando recurrencia, el número de secuencias de largo *n* en el alfabeto {0,1,2}, que tienen un número par de ceros.

5) Suponga que tiene *n* ciudades distintas y que entre cada par de ciudades hay un puente directo que las comunica. Establezca y resuelva una relación de recurrencia para a_n, el número total de puentes directos que enlazan las n ciudades.

6) Calcule el número de individuos en la *n*-ésima generación previa de una abeja macho (A_n), si se sabe que las abejas machos nacen de manera asexual de una abeja hembra y las abejas hembras tiene dos progenitores de diferente sexo.

7) Determine el número de formas (B_n) de colocar *n* bloques que pueden ser de color rojo, azul, blanco o amarillo, de manera que no queden dos bloques rojos adyacentes.

8) Calcule el número mínimo de nodos de un árbol AVL de altura *n*. (Un árbol AVL es aquel árbol binario en el cual, para cualquier nodo, la diferencia de altura entre los subárboles izquierdo y derecho es a lo sumo 1).

9) Resuelva las siguientes relaciones de recurrencia:

a) $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} + 3$ $\quad a_0 = a_1 = 1$
b) $a_n = 3a_{n-1} - n^2 - 3$ $\quad a_0 = 1$
c) $a_n = 2a_{n-1} + n$ $\quad a_0 = 1$
d) $a_n = 2a_{n-1} + 0.5n^2$ $\quad a_0 = 3$

10) Encuentre y resuelva una relación de recurrencia para el número de formas de colocar banderas en un asta de n metros, usando 3 tipos de banderas:
i) banderas rojas de dos metros de altura,
ii) banderas amarillas de 1 metro de altura, y
iii) banderas azules de 1 metro de altura.

(No son casos distintos)

11) Sea f(x) la función generatriz de a_0, a_1, a_2, ... Muestre que f(x)/(1-x) es la función generatriz de: a_0, a_0+a_1, a_0+a_1+a_2,...

12) Dada la siguiente ecuación de recurrencia:

$a_n = 1 + a_0 + a_1 + ... + a_{n-2} + 2a_{n-1}$ para $n \geq 1$ y $a_0 = 0$

a) Encuentre la función generatriz de la secuencia a_0, a_1, a_2, ... (Ayuda: utilice el resultado de la pregunta anterior)

b) Encuentre una forma cerrada para a_n, para todo $n \geq 0$. (Ayuda: recuerde que p(x)/q(x), donde p(x) y q(x) son polinomios, se puede descomponer como suma de fracciones simples).

13) Sea a_n el número de secuencias de largo n en el alfabeto {a,b,c,d} tales que el patrón "aaa" ocurre por primera vez en la posición n. Decimos que un patrón de largo m ocurre en la posición k, si la subsecuencia en las posiciones (k-(m-1)), (k-(m-2)), ..., k es igual al patrón; y ocurre por primera vez en la posición k si para j<k el patrón no ocurre en j.

Ejemplo: n=10

aabccdaaaa no es una secuencia de las definidas pues el patrón "aaa" ocurre por primera vez en la posición 9.

aabadddcdd no es una secuencia de las definidas pues el patrón "aaa" no ocurre en la secuencia.

bbaabacaaa si es una secuencia de las definidas.

Determine una ecuación de recurrencia para los a_n. Diga a partir de que n es válida la ecuación y dé las condiciones iniciales.

14) Calcular, utilizando recurrencia, el número de secuencias de largo n en el alfabeto {0,1,2}, que tienen un número par de ceros. Dar una forma cerrada.

15) Resolver la ecuación de recurrencia:

$T(n) = bT(n/2) + C(n) \quad b \geq 2, n \geq 2$

en los siguientes casos:

a) $n = 2^p$ $\quad$ $C(n) = c$
b) $n = 2^p$ $\quad$ $C(n) = c.n$

16) Sea C_n el número de regiones de un plano dividido por n círculos, tales que para cualquier par de círculos la intersección es en exactamente 2 puntos. Un punto de intersección no puede pertenecer a más de 2 círculos.

a) Suponga que se ha dibujado (n-1) círculos en el plano siguiendo las restricciones dadas. ¿Cuántos puntos de intersección se crean al dibujar un nuevo círculo bajo las mismas restricciones?

b) Encuentre una f'órmula de recurrencia para C_n. Diga a partir de que n es válida la ecuación de recurrencia y de las condiciones iniciales. (Ayuda: vea que relación existe entre los puntos de intersección mencionados en a) y las nuevas regiones que se generan al dibujar un nuevo círculo.

17) Una k-partición de $n \in N$, se define como un conjunto de k dígitos tales que sumados den n. Establecer una ecuación de recurrencia para las k-particiones cuando:

a)Ningún dígito puede ser 0 (partición fuerte)

b)Uno o más dígitos pueden ser 0 (particiones débiles)

18) Villa Gallo es una ciudad que es famosa por la gran cantidad de galleras que inundan sus calles. Se ha estimado que aproximadamente cada dos semanas abre una nueva gallera. Los habitantes asisten masivamente a las galleras después del trabajo, en busca de un golpe de suerte que incremente su nivel económico.

Cada gallera cobra un bolívar para poder entrar, y además cobra un bolívar para salir de la gallera. El sistema de apuestas es bastante sencillo: Si uno apuesta x bolívares a un gallo, y ese gallo gana, entonces se recibe el doble de lo que se apostó, es decir 2x; obviamente si el gallo no gana, no se recibe nada.

Un día llego a Villa Gallo, el Sr. Yago. El Sr. Yago tiene una habilidad sobrenatural, que le permite con exactitud saber que gallo va a ganar en una pelea. Como estaba un poco corto de dinero, decidió visitar algunas galleras. Para no despertar sospechas sobre su habilidad, apostaría solamente una vez en cada gallera que visitara. Naturalmente siempre apostaría todo el dinero del que disponía, ya que estaba seguro de que iba a ganar.

a) Determine una relación de recurrencia para G_n, la cantidad de bolívares que tiene el Sr. Yago al salir de la gallera n. Considere que antes de entrar a la primera gallera, el Sr. Yago dispone de c bolívares.

b) Calcule una forma cerrada para G_n.

c) Suponga que el Sr. Yago visitó 3 galleras, y que al salir de la última gallera, resultó que no tenía dinero. ¿Cuanto dinero tenía antes de entrar en la primera gallera?

VII - OPERADORES Y CALCULOS DE DIFERENCIAS

1) Si C es el operador cubo (C(x) = x^3), y D es el operador derivada (D$(f) = \frac{d}{dx} f = f'$):

Determine:

a) DC(2x-3)

b) (C+D)(4x+2)

c) $(C^2-4C+1)(\sqrt[3]{x-1})$

d) $(D^2-2D+1)(3x^2-5x+4)$

e) (C-2)(D+3)(x^2)

f) (xCxD)(x^3)

Pruebe que D es un operador lineal mientras que C no lo es.

2) Determine si Δ^2 y E^2 son operadores lineales. Sacar conclusiones para Δ^n y E^n.

3) Probar que: $\Delta^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^j E^{n-j}$

4) Encuentre el valor de:

a) $(E^2-3E+2)(2^{x/h}+x)$

b) $(\Delta+1)(2\Delta-1)(x^2+2x+1)$

c) $(E-1)(E-2)(E+2)(1+x+2^x)$

d) $(E-3)(2\text{Sen}(2x))$

e) $(E-1)(E-2)(x4^x)$

5) Determine la veracidad de:

a) $(E-2)(\Delta+3) = (\Delta+3)(E-2)$

b) $(E-2x)(\Delta+3x) = (\Delta+3x)(E-2)$

6) Probar:

a) $\Delta^n = (E-1)^n$

b) $E^{-n}(f(x)) = f(x-nh)$

7) Si $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n$, probar que:

a) $\Delta^n f(x) = n!a_0h^n$

b) $\Delta^{n+1}f(x) = 0$, $\Delta^{n+2}f(x) = 0$

8) Probar:

a) $\Delta[f(x) + g(x)] = \Delta f(x) + \Delta g(x)$

b) $\Delta[f(x).g(x)] = f(x)\Delta g(x) + g(x+h)\Delta f(x)$

c) $\Delta[\dfrac{f(x)}{g(x)}] = \dfrac{g(x)\Delta f(x) - f(x)\Delta g(x)}{g(x)g(x+h)}$

d) $\Delta E = E\Delta$

9) Probar:

a) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta}{\Delta x}[\cos(rx)] = -r\text{sen}(rx)$ sabiendo que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{sen}x}{x} = 1$

b) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta}{\Delta x}[b^x] = b^x\ln b$

10) Probar que $\Delta x^{(-m)}=-mx^{(-m-1)}h$

11) Encuentre:

a) $\dfrac{\Delta}{\Delta x}5x^{(-2)}$

b) $\dfrac{\Delta}{\Delta x}(3x^{(-2)} - 2x^{(2)} - 5x^{(-1)})$

c) $\dfrac{\Delta^2}{\Delta x^2}(2x^{(3)} - 8x^{(-2)})$

12) Si $x^{(n)} = x(x+h)(x-2h)...(x-[m-1]h)$, $m = 1,2,3,...$, probar que

$(\Delta/\Delta x)x^{(m)} = mx^{(m-1)}$ o $\Delta x^{(m)} = mx^{(m-1)}h$ $(h=\Delta x)$

13) Expresar como funciones factoriales

a) $2x^3 - 3x^2 + 5x - 4$
b) $(2x+5)(2x+7)(2x+9)$
c) $\dfrac{1}{(3x-2)(3x+1)(3x+4)(3x+7)}$
d) $\dfrac{x^2+1}{(x+2)(x+4)(x+6)}$
e) $\dfrac{2x+1}{(2x+3)(2x+5)(2x+9)}$

14) Probar que: $\dfrac{\Delta}{\Delta x}(px-q)^{(m)} = m.p(px-q)^{(m-1)}$ para
a) m = 0,1,2,...
b) m = -1,-2,-3,...

15) Derivar la fórmula:

$$s_k^{n+1} = s_{k-1}^n - n\, s_k^n, \qquad s_n^n = 1, s_k^n = 0 \text{ para } k \le 0, k \ge n+1 \ \ (n > 0)$$

16) Sea F(n) = $n^3 + 3n^2 + 2n$. Calcular

a) Δ^3F(n)
b) Δ^4F(n)

17) Sea *op* un operador lineal. Probar que:

$$(op-1)^r x^n = [op^r - \binom{r}{1} op^{r-1} + \binom{r}{2} op^{r-2} - \ldots + (-1)^r \binom{r}{r}] x^n$$

Note que 1 representa el operador identidad.

19) Pruebe que:

$$(x+r)^n - \binom{r}{1}(x+r-1)^n + \binom{r}{2}(x+r-2)^n - \ldots + (-1)^r \binom{r}{r} x^n$$

$$= \begin{cases} 0 \text{ si } r > n \\ n! \text{ si } r = n \end{cases}$$

20) Pruebe que:

$$\underset{h}{\Delta}((a_2 x^{(2)} + a_1 x^{(1)} + a_0 x^{(0)}) / x^{(4)}) = -h(2a_2(x-4h)^{(-3)} + 3a_1(x-4h)^{(-4)} + 4a_0(x-4h)^{(-5)})$$

Ayuda: simplifique la expresión del lado izquierdo antes de aplicar Δ, utilizando la igualdad:
$(x-nh)^{(-n)} = 1/x^{(n)}$ válida para todo $n \ge 1$.

21) Calcular:
a) $\Delta[b^x]$
b) $\Delta[\text{sen}(rx)]$
c) $\Delta[e^{rx}]$
d) $\Delta[x^{(m)}]$
e) $\Delta[\text{tg}(x)]$

22) Obtener una ecuación de recurrencia de los números de Stirling de la primera clase s_k^n y de la segunda clase S_k^n.

23) Probar que: $s_1^n + s_2^n + s_3^n + \ldots + s_n^n = 0$

24) Probar que:

a) $s_1^n - s_2^n + s_3^n - \ldots + (-1)^{n-1} s_n^n = (-1)^{n-1} n!$

b) $|s_1^n| + |s_2^n| + |s_3^n| + \ldots + |s_n^n| = n!$

25) Demuestre que para h=1,

a) $s_k^n = \frac{1}{n!} D^n x^{(k)}\Big|_{x=0}$

b) $s_k^n = \frac{1}{k!} \Delta^k x^n \Big|_{x=0}$

VIII - CALCULO DE SUMAS

1) Probar que: $\sum_{k=1}^{n} \Delta f(k) = f(n+1) - f(1), \quad h = 1$

2) Utilizando el ejercicio 1), encontrar el valor de:

a) $\sum_{k=1}^{n} (2k+1)$

b) $\sum_{k=1}^{n} \frac{3k^2 + 3k + 1}{(k+1)^3 k^3}$

c) $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{2}{(k+2)(k+1)}$

3) Hallar:

a) $2 \times 2^{(4)} + 2 \times 4^{(4)} + 2 \times 6^{(4)} + 2 \times 8^{(4)}$

b) $\sum_{x=0}^{\pi} \cos 4x, \quad h = \frac{\pi}{3}$

c) $\sum_{x=1}^{n} x^2$

d) $\sum_{x=1}^{n} x - 2^x$

Utilice solo conocimientos sobre cálculos de sumas.

4) Calcular:

a) $\sum_{x=1}^{7} 8x^{(3)}, \quad h = 3$

b) $\sum_{x=2}^{6} [3x^{(2)} - 8x^{(1)} + 10], \quad h = 2$

c) $\sum_{x=0}^{2\pi} \cos 5x, \quad h = \frac{\pi}{2}$

d) $\sum_{x=3}^{19} x^{(-3)}, \quad h = 4$

e) $\sum_{x=1}^{n} x2^{x}, \quad h = 1$

f) $\sum_{x=1}^{\infty} \frac{x^2 + 3x + 2}{(4+x)^{(4)}}$, $h = 1$

5) Probar la fórmula de suma por partes

$$\sum f(x)\Delta g(x) = f(x)g(x) - \sum g(x+h)\Delta f(x)$$

6) Encontrar el valor de las siguientes series para n términos:

a) 1.3.5 + 3.5.7 + 5.7.9 + ...
b) 1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + ...
c) 2^2 + 5^2 + 8^2 + 11^2 + ...
d) $\frac{1}{1.3.5} + \frac{1}{3.5.7} + \frac{1}{5.7.9} + \ldots$
e) senθ + sen2θ + sen3θ + ...
f) 10.20^2 + 20.30^2 + 30.40^2 + ...
g) $\frac{1}{1.11.21} + \frac{1}{11.21.31} + \frac{1}{21.31.41} + \ldots$
h) $\frac{1}{2.5.8} + \frac{4}{5.8.11} + \frac{7}{8.11.14} + \ldots$

7) Mostrar que

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

8) Demostrar que:

a) $\sum_{k=0}^{n} ka^k = \frac{(n+1)a^{n+1}}{a-1} - \frac{a^{n+2} - a}{(a-1)^2} \quad a \neq 1$

b) $\sum_{k=0}^{\infty} ka^k = \frac{a}{(1-a)^2} \quad$ para $|a| < 1$

9) Mostrar que:

$$\sum_{x=a}^{a+(n-1)h} x^2 = na^2 + \frac{1}{2}n(n-1)h(2a+h) + \frac{1}{3}n(n-1)(n-2)h^2$$

10) Usar la transformada de Abel para calcular las siguientes sumas:

a) $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k}$

b) $\sum_{k=1}^{n} k^2$

c) $\sum_{k=1}^{n} k^2 a^k \quad a \neq 1$

11) Mostrar la siguiente igualdad para n términos:

$$\frac{1}{sen\theta}+\frac{1}{sen2\theta}+\frac{1}{sen4\theta}+\frac{1}{sen8\theta}+\ldots=cot(\theta/2)-cot\,2^{n-1}\theta$$

12) Dado el algoritmo CONTEO, donde n es una variable global que contiene un número entero mayor o igual que cero y [x] es la parte entera de x:

```
CONTEO:
    Comienzo:
        A,B:conjunto de enteros;
        j,i,a,b:entero;
        A=∅;
        j=0;
        Para i=1 a n hacer A = A ∪ {i};
        Para i=0 a n hacer
        Comienzo
            Si i es par entonces
                Para cada B subconjunto de A de tamaño i hacer
                    Para cada a ∈ B hacer j=j+1;
            Si i es impar entonces
                Para cada B subconjunto de A de tamaño 2[(n+1)/2]-i hacer
                    Para cada a ∈ B hacer
                        Para cada b ∈ B hacer j=j+1
        Fin
    Fin
```

Determine una forma cerrada, en función de n, del valor de j después de ejecutar CONTEO (el cero es considerado par).

IX - RELACIONES DE COMPARACION

1) Probar o rechazar: Si $f_1(n) \prec g_1(n)$ y $f_2(n) \prec g_2(n)$, entonces se tiene que $f_1(n) + f_2(n) \prec g_1(n) + g_2(n)$. ($f(n) \prec g(n)$ es equivalente a decir f=o(g))

2) Detectar la falacia en el siguiente argumento:

"Como n=O(n) y 2n=O(n) y así sucesivamente, entonces se tiene que

$$\sum_{k=1}^{n} kn = \sum_{k=1}^{n} O(n) = O(n^2)."$$

3) Dar un ejemplo de una ecuación válida que utilice la notación O en la izquierda de la ecuación pero no en la derecha. (No utilizar el truco de multiplicar por cero; eso es muy fácil). Ayuda: Considere usar límites.

4) Probar o rechazar: O(*f*(*n*)+*g*(*n*)) = *f*(*n*)+O(*g*(*n*)), si *f*(*n*) y *g*(*n*) son positivos para todo *n*.

5) Dar un ejemplo de funciones f(n) y g(n) tales que ninguna de estas relaciones f(n) $\prec$ g(n), f(n) $\succ$ g(n) y f(n) $\asymp$ g(n) sean válidas, aun cuando f(n) y g(n) crezcan monótonamente a ∞.

6) Demostrar las siguientes proposiciones:

a) f=O(g) si y solo si O(f) $\subseteq$ O(g)

b) O(f+a) = O(f) y O(af) = O(f), para a constante

7) Justificar los siguientes resultados:

a) $(2n^{-1})^2 = \Theta(n^2)$

b) $1+ 3n^{-1} + O(n^{-2}) = (1 + 3n^{-1})(1 + O(n^{-2}))$

c) $\exp((1 + O(n^{-1}))^2) = e + O(n^{-1})$

X - CALCULOS SOBRE LAS RELACIONES DE COMPARACION

1) Demostrar las siguientes proposiciones:

a) Si α y β son dos constantes reales > 1, entonces $O(\log_\alpha n) = O(\log_\beta n)$

b) $u = v + O(f)$ si y solo si $v = u + O(f)$

c) Si $v \neq 0$, entonces $u = v + O(1)$ si y solo si $u = v(1 + O(1/v))$

d) Si f=o(1), entonces $u = v(1 + O(f))$ si y solo si $v = u(1 + O(f))$

2) Mostrar que:

a) Si f=o(1), entonces $\log(1 + O(f)) = O(f)$

b) Si f=O(1), entonces $e^{O(f)} = 1 + O(f)$

c) Deducir que si f=o(1) y fg=O(1) entonces $(1 + O(f))^{O(g)} = 1 + O(fg)$

3) Multiplicar $(\ln n + \gamma + O(1/n))$ por $(n + O(\sqrt{n}))$ y expresar la respuesta en notación O.

4) Probar o rechazar: $O(f(n)^\alpha) = O(f(n))^\alpha$, para $\alpha > 0$ real.

5) Probar que:

$$1+\frac{2}{n}+O(n^{-2}) = (1+\frac{2}{n})(1+O(n^{-2})) \text{ cuando } n \to \infty$$

XI - ESCALA DE COMPARACION

1) Mostrar que $n^n \leq (n!)^2 \leq ((n+1)/2)^{2n}$ y deducir que $\log(n!) = \Theta(n\log n)$

2) Demostrar:

a) $n^{(\ln n)} \prec (\ln n)^n$

b) $n^{(\ln \ln \ln n)} \prec (\ln n)!$

c) $(n!)! \succ ((n-1)!)!(n-1)!^{n!}$

3) Establecer la siguiente equivalencia:

$$n^{\alpha 1}(\log n)^{\alpha 2}(\log \log n)^{\alpha 3} \prec n^{\beta 1}(\log n)^{\beta 2}(\log \log n)^{\beta 3} \Leftrightarrow (\alpha 1,\alpha 2,\alpha 3) < (\beta 1,\beta 2,\beta 3)$$

donde '$(\alpha 1,\alpha 2,\alpha 3) < (\beta 1,\beta 2,\beta 3)$' significa orden lexicográfico; en otras palabras, $\alpha 1 < \beta 1$, o $\alpha 1 = \beta 1$ y $\alpha 2 = \beta 2$, o $\alpha 1 = \beta 1$ y $\alpha 2 = \beta 2$ y $\alpha 3 < \beta 3$.

1) Mostrar que u_n, definida por la ecuación de recurrencia $u_n = a + bn + \frac{2}{n}\sum_{i=0}^{n-1} u_i$, es asintóticamente del mismo orden de magnitud que $n\log n$.

2) Probar que:

$$(n+\alpha)^{n+\beta} = n^{n+\beta} e^{\alpha}(1 + \alpha(\beta - \tfrac{1}{2}\alpha)n^{-1} + \mathrm{O}(n^{-2}))$$

3) Dar una fórmula asintótica de $\binom{3n}{n,n,n}$, con un error relativo $\mathrm{O}(n^{-3})$

4) Estimar asintóticamente las siguientes funciones:

a) $(\log n - 2 + \mathrm{O}(n^{-1}))(n + \mathrm{O}(n^{2/3}))$
b) $(1 - n^{-1})^{n}$
c) $(n + 1 + \mathrm{O}(n\text{-}1))$
d) $(1 - e^{-1/n})^{-1}$, y deducir una representación asintótica de $\sum_{i=0}^{n} e^{-i/n}$

5) Para todo entero i, sea $s(i) = \sum_{d|i} d$ la suma de los divisores de i. Hallar una representación asintótica a 2 términos de la función:

$$D(n) = \sum_{i=1}^{n} s(i)$$

sabiendo que:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} = \frac{\pi^2}{6} + \mathrm{O}(n^{-1}) \text{ y}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = \mathrm{O}(\log n)$$

6) Sea $S_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{n^2 + i}$. Dar una representación asintótica de S_n a un término, a dos términos y a tres términos.

7) Encontrar una representación asintótica para

$$f(n) = e^{\frac{\ln(n+1)}{n}} - 1$$

1) Estime los tiempos de ejecución de los siguientes algoritmos:

a) Programa COSA;

```
Para i de 1 a (n-1) hacer
    Para j de (i+1) a n hacer
        Para k de 1 a j hacer
            I1; I2; I3;   (las acciones Ii son de orden O(1))
        FinPara
    FinPara
FinPara
Fin COSA;
```

b) Program ESSAI;

```
Leer(n);
x:=0; y:=0;
Para i de 1 a n hacer
    Si impar(i) entonces
        Para j de 1 a n hacer
            x:=x+1;
        FinPara
        Para j de 1 a i hacer
            y:=y+1;
        FinPara
    FinSi
FinPara
Escribir(x,y)
FinESSAI;
```

c) Programa TOTO (n:entero; A:arreglo[1..n] de enteros)

```
Para i de n a 1 con paso (-1) hacer
    j:=i;
    Mientras A[j]<>0 y j>1 hacer
        j:=j-1;
    FinMientras
    B[j]:=i;
    Para k de j a n hacer
        A[k]:=A[k]-1;
    FinPara
FinPara
FinTOTO;
```

2) Con las condiciones iniciales F_1=0 y F_2=1, los términos de la serie de Fibonacci F_i=F_{i-1}+F_{i-2} verifican las siguientes relaciones:

$$F_{2k} = F_k^2 + F_{k+1}^2 \qquad (1)$$

$$F_{2k+1} = (2F_k + F_{k+1})F_{k+1} \qquad (2)$$

Evaluar la correctitud de los siguientes algoritmos para determinar F_n y calcular su complejidad:

```
a) FUNCION FIB1(n : entero) : entero;
        a:=0;
        b:=1;
        Para i de 2 a n hacer
                a:=a+b;
                b:=a-b;
        FinPara
        FIB1 := a;
   FinFIB1;
```

b) Este algoritmo hace uso de las relaciones antes descritas para acelerar el proceso de cálculo. A partir de un par (F_k, F_{k+1}), se obtiene todas las parejas (F_m, F_{m+1}), con $m=2^pk$.
Considérese la representación de n en base 2:

$$n = 2^p + c_{p-1}2^{p-1} + ... + c_1 2 + c_0$$

que puede ser expresado de la siguiente forma:

$$n = (...((2 + c_{p-1})2 + c_{p-2})2 + ...)2 + c_0$$

Considérese la secuencia

$$d_0 = 1$$
$$d_i = 2d_{i-1} + c_{p-i}$$

donde $n = d_p = 2d_{p-1} + c_0$.

Viendo las fórmulas (1) y (2), $F_{d_{i+1}}$ puede obtenerse a partir de F_{d_i} y F_{d_i+1}.
El bit de paridad de d_i es c_{p-i}, es decir, que d_i es par si y solo si c_{p-i}=0. De esta forma:
- si cp-i = 0, F_{d_i} se obtiene por la fórmula (1) y F_{d_i+1} por la fórmula (2)
- si cp-i = 1, F_{d_i} se obtiene por la fórmula (2) y F_{d_i-1} por la fórmula (1)

donde la definición de la serie es $F_{d_i+1} = F_{d_i} + F_{d_i-1}$

El algoritmo resulta entonces:

```
FUNCION FIB2(p : entero) : entero;
        a:=0;
        b:=1;
        Para i de 1 a p hacer
                t:=a;
                a:=a*a + b*b;
                b:=(2*t+b)*b;
                Si c_{p-i} = 1 entonces
                        b:=a+b;
                        a:=b-a;
                FinSi
        FinPara
        FIB2:=b;
   FinFIB2;
```

3) El principio del método de ordenamiento por fusión de una lista de n claves, se puede resumir de la siguiente manera:
- Ordenar la mitad izquierda de la lista
- Ordenar la mitad derecha de la lista
- Fusionar las dos listas en una nueva lista ordenada.

De esta forma, si se tiene un algoritmo eficaz para fusionar dos listas ordenadas, se puede crear un algoritmo recursivo de ordenamiento. Ahora, para fusionar dos listas ordenadas, es suficiente disponer de dos apuntadores, posicionados inicialmente al inicio de cada lista ordenada. En cada paso, se compara los elementos referidos por cada apuntador. El menor elemento es colocado en su posición. El apuntador correspondiente (el que refería al menor elemento) es desplazado al siguiente elemento. El proceso culmina cuando se alcanza el final de algunas de las dos listas.

Supongamos que se utiliza una estructura de listas con apuntadores, declarada de la siguiente forma:

```
pelemento : ↑elemento;
elemento : (clave:entero; proximo:pelemento)
```

Adicionalmente se supone la existencia de un elemento especial s que sirve como sentinela (s↑.clave = maxint, s↑.proximo = s. El procedimiento de fusión puede escribirse como sigue:

```
FUNCION FUSION(a, b:pelemento):pelemento;
    c:=s;
    Repetir
        Si a↑.clave ≤ b↑.clave entonces
            c↑.proximo := a;
            c := a;
            a := a↑.proximo;
        Sino
            c↑.proximo := b;
            c := b;
            b := b↑.proximo;
        FinSi
    Hasta c↑.clave = maxint;
    FUSION := s↑.proximo;
    s↑.proximo := s;
FinFUSION
```

El procedimiento de ordenamiento por fusión puede escribirse como sigue:

```
FUNCION ORDENA(n:entero; c:pelemento): pelemento;
    Si c↑.proximo = s entonces
        ORDENA:=c
    Sino
        a:=c;
        Para i de 2 a ⌊n/2⌋ hacer
            c:=c↑.proximo
        FinPara
        b:=c↑.proximo
        c↑.proximo:=s;
        ORDENA:=FUSION(ORDENA(⌊n/2⌋,a),ORDENA(⌈n/2⌉,b))
    FinSi
FinORDENA
```

4) Sean A y B dos polinomios en x de la siguiente forma:

$$A(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^{n-1}$$
$$B(x) = b_0 + b_1x + ... + b_mx^{m-1}$$

Estimar la complejidad del cálculo de los coeficientes del producto $P(x) = A(x)B(x)$